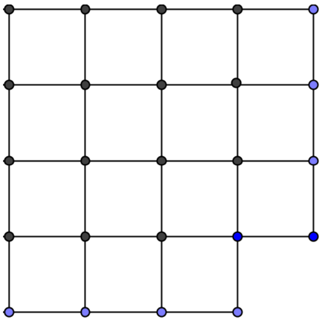
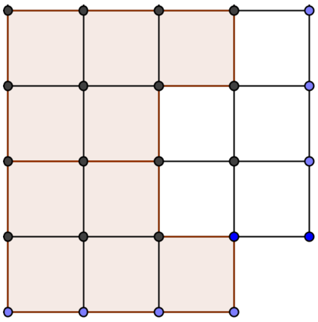
7.1. Разрезать фигуру, изображенную на рисунке справа, на три равные части: линии разрезов должны проходить по сторонам квадратов.





Решение. Заметив, что каждая из трех частей должна состоять из пяти квадратов, несложно найти нужное разрезание, например, как на рисунке слева, где одна из трех частей не закрашена, а две другие (закрашенные) симметричны относительно горизонтальной оси.

7.2. В 7-м «А» классе мальчики составляют 45% учеников, девочки – 55%. После того, как в класс пришли двое новеньких – мальчики – мальчиков и девочек в классе стало по 50%. Сколько учеников стало в классе?

Решение. Пусть первоначально в классе было n учеников. Тогда мальчиков было $0{,}45n$, а девочек было $0{,}55n$. После прихода новеньких мальчиков в классе стало $0{,}45n+2$, и, по условию задачи, сравнялось с числом девочек (число которых не изменилось), т.е. $0{,}45n+2=0{,}55n$, откуда $2=0{,}10n$ и $n=20$, а новое число учеников $n+2=22$.

Ответ: 22.

7.3. Как-то на чердаке заброшенного дома была найдена древняя тетрадь, в которой было записано 2018 утверждений – вот они:
1) «В этой тетради имеется ровно 1 неверное утверждение»,
2) «В этой тетради имеется ровно 2 неверных утверждения»,
……………………………………………………………………,
2018) «В этой тетради имеется ровно 2018 неверных утверждений».

Есть ли среди этих утверждений верные, и если есть, то какие?

Решение. Предположение о том, что в найденной тетради нет верных утверждений (т.е. все утверждения неверные) приводит к противоречию – верным оказывается 2018-е утверждение. Поэтому верные утверждения есть, но не более одного, т.к. любые два из них противоречат друг другу. Таким образом, есть ровно одно верное утверждение и 2017 – неверных.

Ответ: верное утверждение одно – 2017-е.

7.4. На заборе были написаны следующие числа: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, но Боря и Вася стерли по очереди по четыре числа, и сумма чисел, стертых Борей, оказалась втрое меньше суммы чисел, стертых Васей. Какое число осталось на доске?

Решение. Сумма всех чисел равна 70. Пусть n – сумма чисел, стертых Борей, тогда $3n$ – сумма чисел, стертых Васей, $4n$ – сумма всех стертых чисел, а $70-4n$ – оставшееся число, которое при делении на 4 дает в остатке 2. Но таким числом среди написанных является только 6.

Ответ: 6.

7.5. Имеется 101 монета, среди которых сто настоящих и одна фальшивая, которая легче настоящих. За какое количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно гарантированно определить фальшивую монету?

Решение. Алгоритм экономичного взвешивания состоит в делении всех монет на три равные части (или примерно равные, если общее число монет не кратно 3).

1 взвешивание: разделим монеты на три кучи: по 34, 34 и 33 монеты, и сравним на весах две первые (равные по числу монет). Возможны варианты: а) если чаши не уравновесились, то фальшивая монета среди тех 34-х, которые оказались легче; б) если чаши уравновесились, то фальшивая монета среди 33-х монет третьей кучи – в этом случае, добавив к этим 33-м монетам (среди которых фальшивая) любую монету из первой или второй кучи (т.е. точно не фальшивую), мы опять (как и в случае а) будем далее иметь дело с кучей в 34 монеты, среди которых фальшивая.

2 взвешивание: разделив 34 монеты на три кучи: по 11, 11 и 12 монет, и сравнив на весах две первые, мы сумеем определить, в какой из трех куч фальшивая, и если она в одной из первых двух куч, то добавим в эту кучу одну монету из третьей (чтобы не рассматривать вариант с 11 монетами).

3 взвешивание: разделим 12 монет на три кучи: по 4 монеты в каждой, и с помощью этого взвешивания выделим ту кучу (из 4 монет), среди которых есть фальшивая.

4 взвешивание: из оставшихся 4 монет (среди которых фальшивая) сравним любые две: в случае уравновешивания этих двух потребуется

5 *взвешивание*: сравниваются 2 монеты, среди которых фальшивая.

Ответ: за 5 взвешиваний.

Решения задач олимпиады по математике в 2018-2019 учебном году
8 класс

8.1. В 8-м «А» классе мальчики составляют 30% учеников, и девочки 70%. После того, как в класс пришли двое новеньких – близнецы Коля и Оля – доля мальчиков в классе возросла до 31,25%. Сколько учеников было в классе до прихода новеньких?

Решение. Пусть первоначально в классе было n учеников. Тогда мальчиков было $0{,}3n$, а девочек – $0{,}7n$. После прихода новеньких мальчиков в классе стало $0{,}3n+1$, девочек $0{,}7n+1$, всех учеников $n+2$. По условию задачи

$$\frac{0{,}3n+1}{n+2}\cdot 100\% = 31{,}25\%.$$

Решив это уравнение, найдем $n = 30$.

Ответ: 30.

8.2. Один из попугаев *A, B, C* всегда говорит правду, другой всегда врет, а третий хитрец – иногда говорит правду, иногда врет. На вопрос *“Кто B?”* они ответили:

A: “Он лжец!”
B: “Не верьте, я хитрец!”
C: “Он абсолютно честный попугай!”

Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

Решение. Рассмотрим все возможные гипотезы о попугае *B*:

Гипотеза первая: ***B* – всегда говорит правду** – сразу опровергается тем, что правдивый попугай не мог о себе сказать, что он хитрец.

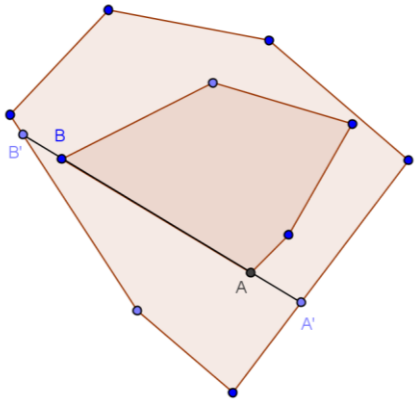
Гипотеза вторая: ***B* – всегда говорит ложь** – непротиворечива: в этом случае *A* сказал правду, *B* солгал (как и положено лжецу), *C* тоже солгал, следовательно при этой гипотезе *B* – лжец, *C* – хитрец.

Гипотеза третья: ***B* – хитрец** – также приводит к противоречию: при данной гипотезе *B* сказал о себе правду, что допускается, но солгали и *A*, и *C*, что невозможно, т.к. среди них должен быть попугай, всегда говорящий правду.

Итак, из трех гипотез непротиворечива только одна (вторая), поэтому:

Ответ: *B* – лжец, *C* – хитрец (*A* – попугай, всегда говорящий правду, но вопрос о нем не ставился).

8.3. Выпуклый многоугольник F помещается внутри выпуклого многоугольника Φ. Доказать, что периметр внутреннего многоугольника (F) не превосходит периметра внешнего многоугольника (Φ).



Решение. Будем отрезать от многоугольника Φ части, вдоль прямых, содержащих стороны многоугольника F. На рисунке справа показан первый разрез – по отрезку $A'B'$, содержащему сторону AB многоугольника F: A', B' – точки пересечения прямой AB с границей Φ (их две, т.к. многоугольник Φ также выпуклый). Ясно, что длина отрезка AB не превосходит длины отрезка $A'B'$, а та, в свою очередь, не превосходит суммы длин остальных сторон отрезанного многоугольника. С помощью нескольких таких разрезаний (по числу сторон многоугольника F) мы перейдем от Φ к F; на каждом шаге периметр оставшейся от Φ части мог только уменьшаться.

Ясно, что случай равенства периметров Φ и F возможен – в случае полного совпадения многоугольников.

Ясно также, что выпуклость внутреннего многоугольника здесь играет существенную роль, т.к. периметр невыпуклого многоугольника можно было сделать каким угодно большим.

8.4. Отличник перемножил все натуральные числа до 2018 включительно. У полученного произведения он вычислил сумму его цифр; у полученного в результате этого числа он снова вычислил сумму его цифр и так далее – у всякого очередного полученного числа он вычислял сумму его цифр – пока не получил однозначное число. Какое это было число?

Решение. Напомним, что сумма цифр числа фигурирует в признаках делимости на 3 и на 9. Так как исходное произведение натуральных чисел содержало девятку, то полученное произведение делилось на 9. Поэтому делилась на 9 и сумма цифр этого произведения, и делилась на 9 всякая очередная сумма цифр, в том числе, последняя, оказавшаяся однозначным числом. Но это могла быть только девятка (ноль в качестве суммы цифр натурального числа выступить не может).

Ответ: 9.

8.5. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 6 (справа), которые от перестановки этой цифры влево, увеличиваются в четыре раза.

Решение. Приведем два способа решения задачи.

1 способ. Т.к. умножение "в столбик" начинается с последней цифры, а она у нас известна, то мы можем начать процесс умножения:

$$\begin{array}{r} \ldots 6 \\ \underline{\quad 4} \\ 4 \end{array}$$

(два в уме) – но появившаяся в произведении 4 – это цифра, стоявшая перед 6 до ее переноса, таким образом, мы узнали и предпоследнюю цифру и можем продолжить процесс:

$$\begin{array}{r} \ldots 46 \\ \underline{\quad 4} \\ \ldots 84 \end{array}$$

(один в уме) – итак, мы узнали следующую за 4 цифру – 8. Продолжая этот процесс, мы сможем остановиться, получив первый раз 6 (в качестве очередной угаданной цифры). Считая ее той самой – перенесенной справа, получим $m = 153846$ – самое маленькое из искомых чисел. Остальные получаются, если мы склеим несколько экземпляров таких шестизначных.

2 способ. Обозначим X – искомое число, x – число, получающееся из X отбрасыванием последней цифры, т.е. $X = \overline{x6} = 10x + 6$. После перестановки 6 в начало, мы получим число $\overline{6x} = 10^k \cdot 6 + x$, где k – количество цифр в десятичной записи x. По условию $\overline{x6} \times 4 = \overline{6x}$ или

$$(10x + 6) \cdot 4 = 6 \cdot 10^k + x,$$

откуда

$$13x = 19..92,$$

где между единицей и двойкой находятся $k-1$ девяток. Деля "уголком" число 19…92 на 13, мы будем сносить девятки до тех пор, пока очередной остаток с приписанной к ней двойкой не разделится нацело на 13. В итоге получим

$$x = 15384 \text{ и } X = 153846,$$

Но процесс снесения девяток можно было продолжать, поэтому

Ответ: 153846, 153846153846, 153846153846153846, … (всякое следующее число получается из предыдущего приписыванием 153846).

Решения задач олимпиады по математике в 2018-2019 учебном году

9 класс

9.1. На доске написано 1001 различных натуральных чисел. Известно, что сумма любых трех из них (но различных) больше суммы любых двух (также различных). Может ли среди этих чисел оказаться число 2018?

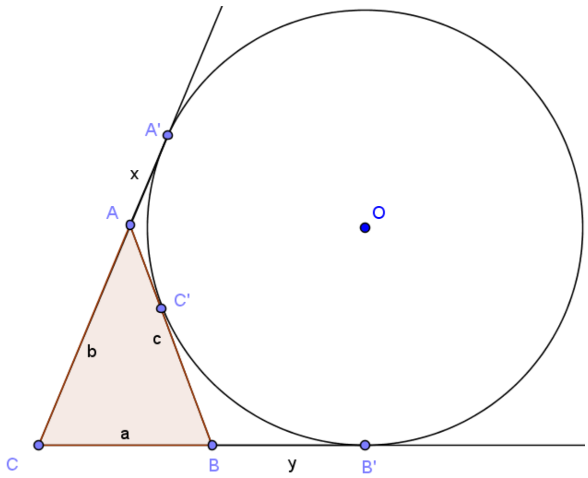
Решение. В следующем наборе чисел 1001 число:

$$2000,\ 2001,\ 2002,\ \ldots,\ 2999,\ 3000,$$

причем, сумма трех наименьших $2000+2001+2002=6003$ больше суммы двух наибольших $2999+3000=5999$, и любая тройка чисел дает сумму не меньшую 6003, а любая пара чисел дает сумму меньшую 6000 – все требования к набору выполнены, и число 2018 среди них имеется.

Ответ: может.

9.2. Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке C' и продолжений сторон CA и CB в точках A' и B' соответственно. Найдите длины отрезков AA' и BB', если известны длины сторон треугольника: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.



Решение. Обозначим $AA'=x$, $BB'=y$. По свойствам касательных: $AC'=AA'=x$ и $BC'=BB'=y$, откуда $x+y=c$ (1). Аналогично $CA'=CB'$, откуда $b+x=a+y$ (2). Решив систему из уравнений (1)-(2), получим

Ответ: $x=\dfrac{c-b+a}{2}$, $y=\dfrac{c+b-a}{2}$

9.3. Решить систему уравнений:

$$\{x_0+x_1+x_2=0, x_1+x_2+x_3=0, \ldots, x_8+x_9+x_0=0, x_9+x_0+x_1=0\}.$$

Решение. Продолжим для удобства последовательность x_n формулой $x_{n+10}=x_n$. Из уравнений $x_n+x_{n+1}+x_{n+2}=0$ и $x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}=0$ найдем $x_n=x_{n+3}$, откуда $x_0=x_3=x_6=x_9=x_{12}=x_2=x_5=x_8=x_{11}=x_1=x_4=x_7$ – подставив это в любое из равенств, получим, что все $x_n=0$.

Ответ: $x_0=x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=x_7=x_8=x_9=0$.

9.4. Положительное число S представить в виде суммы двух слагаемых, произведение которых будет наибольшим.

Решение. Обозначим слагаемые, на которые мы разбиваем число S, через x и y, т.е. $S = x + y$. Произведение этих чисел обозначим через P, т.е. $P = x \times y$. С помощью формулы связи $S = x + y$ найдем $y = S - x$ и подставим это в выражение для произведения:

$$P = x \times y = x \cdot (S - x).$$

Таким образом, P оказывается функцией одной переменной x: $P = P(x)$ – целевая функция, которую нам и надо исследовать на максимум. Приведем два способа исследования, доступные девятиклассникам.

1 способ. Так как в выражении $P(x) = x \cdot (S - x)$ увеличение одного сомножителя приводит к уменьшению другого, то удобнее преобразовать это выражение, сначала раскрыв скобки, затем выделив полный квадрат:

$$P(x) = x \cdot (S - x) = S \cdot x - x^2 = -(x^2 - S \cdot x) = -\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{S}{2} + \frac{S^2}{4} - \frac{S^2}{4}\right) = \frac{S^2}{4} - \left(x - \frac{S}{2}\right)^2.$$

В последнем выражении для P, имеющем вид разности, уменьшаемое не зависит от x, поэтому увеличить P можно только уменьшив вычитаемое, но оно, являясь квадратом и принимая неотрицательные значения, может быть уменьшено только до нуля (при $x = S/2$), т.е.

Ответ: слагаемые должны быть равными: $\max\ P(x) = P\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{4}$.

2 способ. $P(x) = S \cdot x - x^2$ является квадратичной функцией с корнями $x = 0$ и $x = S$; графиком этой функции в плоскости XZ является парабола, ветви которой направлены вниз, а координаты вершины

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{S}{2}, \quad z_0 = \frac{-D}{4a} = \frac{S^2}{4}$$

дают нам и точку экстремума, и максимальное значение функции.

Замечание. Т.к. максимальное значение функции не меньше любого другого значения ($\max(xy) \geq xy$), то, с учетом найденного максимума, избавляясь от S и извлекая корни, можно получить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x, y \geq 0.$$

9.5. Лиса Алиса и Кот Базилио имеют перед собой кучу из 2018 монет. Они по очереди берут из этой кучи от 1 до 6 монет (ходы Лисы Алисы и Кота Базилио строго чередуются; пропуск ходов не разрешается: хотя бы одну монету за свой ход должен взять каждый, но число монет, взятых за один ход, не может превышать шести). Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю монету. Кто станет победителем при правильной игре, если первый ход делает Лиса Алиса?

Решение. Очевидно, что тот, кто делает ход, когда в куче остается 7 монет, проигрывает: сколько бы монет он ни взял, в куче останется от 1 до 6 монет, и его противник сможет забрать все эти монеты и выиграет. Таким образом, выиграет тот, кто оставит после своего хода 7 монет. Но чтобы гарантированно прийти к этой ситуации, он должен был оставить после своего предыдущего хода 14 монет, и после всякого своего хода он должен оставлять в куче число монет, кратное семи. Так как число 2018 на 7 не делится (в остатке получается 2), то выигрышная стратегия есть у первого игрока – первым ходом он забирает 2 монеты, оставляя число монет, кратное семи, и всяким следующим своим ходом восстанавливает кратность 7 числа монет, остающихся в куче.

Ответ: При правильной игре выиграет первый игрок – Лиса Алиса.

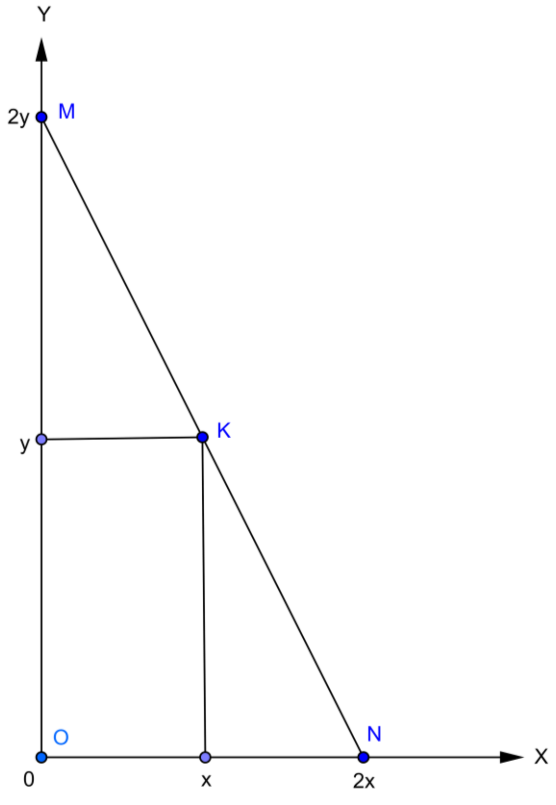
10.1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два целых корня, каждый из которых больше 2. Доказать, что $f(1)$ – целое составное число.

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни данного многочлена – по условию целые, $x_1 > 2$ и $x_2 > 2$. Тогда $p = -x_1 - x_2$ и $q = x_1 \times x_2$ – целые. Найдем

$$p + q + 1 = -x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2 + 1 = x_1(x_2 - 1) - (x_2 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$$

– тут оба сомножителя целые, большие единицы, т.е. $p + q + 1$ – составное.

10.2. Лестница длиной $2l$ прислонена вертикально к стене. На середине лестницы (на расстоянии l от обоих ее концов) неподвижно сидит кошка. В какой-то момент времени нижний край лестницы начинает скользить по полу, удаляясь от стены (верхний край лестницы соскальзывает по стене, а кошка сидит неподвижно относительно лестницы на занятой ей середине). По какой траектории движется кошка от начального момента времени, когда она сидела на высоте l от пола (прислоненная к стене), до момента приземления (соприкосновения с полом на расстоянии l от стены)?



Решение. Введем декартову систему координат, взяв ось X на полу (перпендикулярно стене), ось Y на стене (перпендикулярно полу).

Пусть N – нижний край лестницы, M – верхний край, K – середина. Если x, y – координаты кошки в этой системе, т.е. $K(x, y)$, то $N(2x, 0)$, $M(0, 2y)$. Применив теорему Пифагора к ΔNOM: $ON^2 + OM^2 = NM^2$ получим после подстановок и сокращений $x^2 + y^2 = l^2$ – это и есть уравнение дуги, по которой т. K движется от $K_0 = (0, l)$ до $K_1 = (l, 0)$.

Ответ: кошка будет двигаться (вместе с серединой лестницы) от стены до пола по дуге окружности с центром в точке $O(0,0)$ (начальном положении нижнего края лестницы) и радиуса l.

10.3. На доске написано 1001 различных натуральных чисел. Известно, что сумма любых четырех из них (но различных) больше суммы любых трех (также различных). Может ли среди этих чисел оказаться число 2018?

Решение. Перенумеруем написанные числа в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 ... < a_{999} < a_{1000} < a_{1001}.$$

Так как числа натуральные и различные, то $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$ (поскольку $a_2 > a_1$) и, вообще, $a_k \geq k$. Условие $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > a_{999} + a_{1000} + a_{1001}$ гарантирует, что сумма любых четырех будет больше суммы любых трех. Перепишем последнее неравенство в равносильном виде:

$$a_1 > (a_{999} - a_2) + (a_{1000} - a_3) + (a_{1001} - a_4).$$

Но $a_m - a_n \geq m - n$ при $m \geq n$, т.к. между a_n и a_m имеются попарно различные натуральные числа a_{n+1}, a_{n+2}, …, a_{m-1}, поэтому

$$a_1 > (a_{999} - a_2) + (a_{1000} - a_3) + (a_{1001} - a_4) \geq (999 - 2) + (1000 - 3) + (1001 - 4),$$

т.е. $a_1 > 2991$, т.е. самое маленькое из написанных чисел больше 2018, тем более, остальные числа больше 2018.

Ответ: нет.

10.4. Положительное число P представить в виде произведения двух положительных сомножителей, сумма которых будет наименьшей.

Решение. Обозначим сомножители числа P через x и y, т.е. $P = x \times y$. Сумму этих чисел обозначим через S, т.е. $S = x + y$. С помощью формулы связи $P = x \times y$ найдем $y = \frac{P}{x}$ и подставим это в выражение для суммы:

$$S = x + \frac{P}{x}.$$

Таким образом, S оказывается функцией одной переменной x: $S = S(x)$ с областью определения $x > 0$, которую нам и надо исследовать на минимум. Десятиклассники могут произвести это исследование с помощью производной. Мы приведем элементарное решение задачи без применения производной.

1 способ. Так как в выражении $S(x)=x+\frac{P}{x}$ для целевой функции увеличение одного слагаемого приводит к уменьшению другого, то удобнее преобразовать это выражение:

$$S(x)=x+\frac{P}{x}=\frac{x^2+P}{x}=\frac{x^2-2x\sqrt{P}+P+2x\sqrt{P}}{x}=\frac{\left(x-\sqrt{P}\right)^2}{x}+2\sqrt{P}\,.$$

В последнем выражении для S, также имеющем вид суммы, второе слагаемое не зависит от x, поэтому уменьшить S можно только за счет первого слагаемого, но оно является неотрицательным при $x>0$ и может быть уменьшено только до нуля – при $x=\sqrt{P}$ (тогда и $y=\sqrt{P}$), поэтому

Ответ: сомножители должны быть равны: $\min(x+y)=S\left(\sqrt{P}\right)=2\sqrt{P}$.

2 способ. С помощью известного неравенства $a+a^{-1}\geq 2$ при $a>0$, где равенство достигается только при $a=1$, получим:

$$S(x)=x+\frac{P}{x}=\sqrt{P}\left(\frac{x}{\sqrt{P}}+\frac{\sqrt{P}}{x}\right)\geq 2\sqrt{P}\,,$$

равенство достигается только при $x=\sqrt{P}$, и $\min\, S(x)=S\left(\sqrt{P}\right)=2\sqrt{P}$.

Замечание. Второй способ использует, фактически, неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Однако доказанный иным способом факт может быть использован, наоборот, для вывода этого неравенства: так как минимальное значение функции не больше любого значения, в частности, $\min(x+y)\leq x+y$, т.е. $2\sqrt{P}\leq x+y$ – избавившись от P и разделив обе части неравенства на 2, получим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2},\text{ где } x,y\geq 0\,.$$

10.5. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что значения $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, …, $P(2018)$ – трехзначные натуральные числа. Доказать, что многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

Решение. Пусть a – целый корень многочлена $P(x)$. Так как $P(a)=0$, то a не содержится среди чисел 1, 2, 3, …, 2018. Поэтому хотя бы одно из тысячи последовательных целых чисел $1-a$, $2-a$, $3-a$ …, $1000-a$ по модулю не меньше 1000. Пусть это число $n-a$. Но тогда $P(n)=P(n)-P(a)$ не может быть трехзначным, так как делится на $n-a$. Противоречие.

Решения задач олимпиады по математике в 2018-2019 учебном году
11 класс

11.1. На шахматной доске расставили 8 ладей, так, что никакая ладья не бьет другую (иначе говоря, на каждой горизонтали доски находится по одной ладье и на каждой вертикали находится по одной ладье). Затем доску разделили на четыре равные четверти средними линиями шахматной доски. Доказать, что в левой верхней четверти доски столько же ладей, сколько в правой нижней.

Решение. Обозначим a – число ладей в левой верхней четверти, b – число ладей в правой верхней четверти, c – число ладей в левой нижней четверти, d – число ладей в правой нижней четверти. По условию задачи, в левой половине доски (образованной четырьмя первыми вертикалями) 4 ладьи, т.е. $a+c=4$; аналогично получаем остальные уравнения системы:

$$\begin{cases} a+c=4, & b+d=4, \\ a+b=4, & c+d=4, \end{cases}$$

из которой следует: $a=4-c$, $d=4-c$, значит $a=d$, что и требовалось.

11.2. На доске написано 1001 различных натуральных чисел. Известно, что сумма любых четырех из них (но различных) больше суммы любых трех (также различных). Найти минимальное значение суммы всех чисел.

Решение. Перенумеруем написанные числа в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 ... < a_{999} < a_{1000} < a_{1001}.$$

Так как числа натуральные и различные, то $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$ (поскольку $a_2 > a_1$) и, вообще, $a_k \geq k$. Условие $a_1+a_2+a_3+a_4 > a_{999}+a_{1000}+a_{1001}$ гарантирует, что сумма любых четырех будет больше суммы любых трех. Перепишем последнее неравенство в равносильном виде:

$$a_1 > (a_{999}-a_2)+(a_{1000}-a_3)+(a_{1001}-a_4).$$

Но $a_m - a_n \geq m-n$ при $m \geq n$, так как между a_n и a_m имеются попарно различные натуральные числа a_{n+1}, a_{n+2}, …, a_{m-1}, поэтому

$$a_1 > (a_{999}-a_2)+(a_{1000}-a_3)+(a_{1001}-a_4) \geq (999-2)+(1000-3)+(1001-4),$$

т.е. $a_1 > 2991$, т.е. $a_1 \geq 2992$ и минимальное значение суммы всех чисел получится, если взять $a_1 = 2992$, остальные числа следуют без пропусков:

$$\min(a_1+a_2+a_3+...+a_{1001}) = 2992+2993+2994+...+3992 = 3.495.492$$

по формуле суммы членов арифметической прогрессии.

Ответ: 3.495.492.

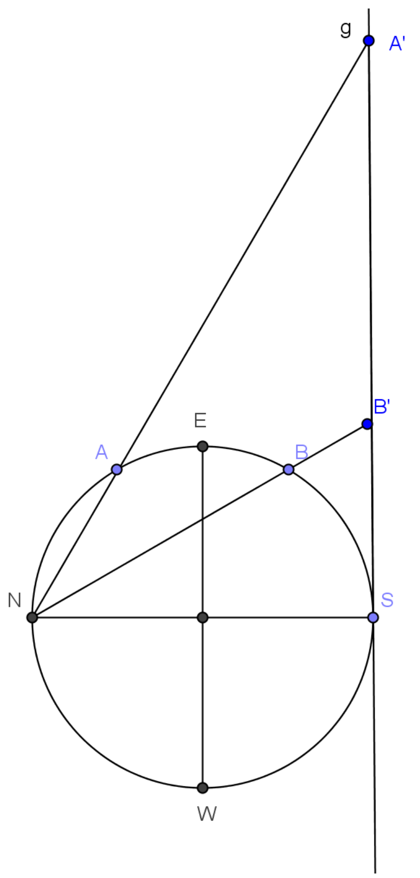
11.3. Какое наименьшее число ходов потребуется коню, чтобы из одного угла шахматной доски $n\times n$ $(n\geq 4)$ добраться до противоположного угла?

Ответ: $2\left[\frac{n+1}{3}\right]$ (т.е. если $3m-1\leq n\leq 3m+1$, то потребуется $2m$ ходов).

Решение. Нетрудно убедиться в том, что коню достаточно двух ходов на доске 4×4 и четырех ходов на досках 5×5 и 6×6. Далее достаточность указанного количества ходов легко доказывается по индукции с шагом 3.

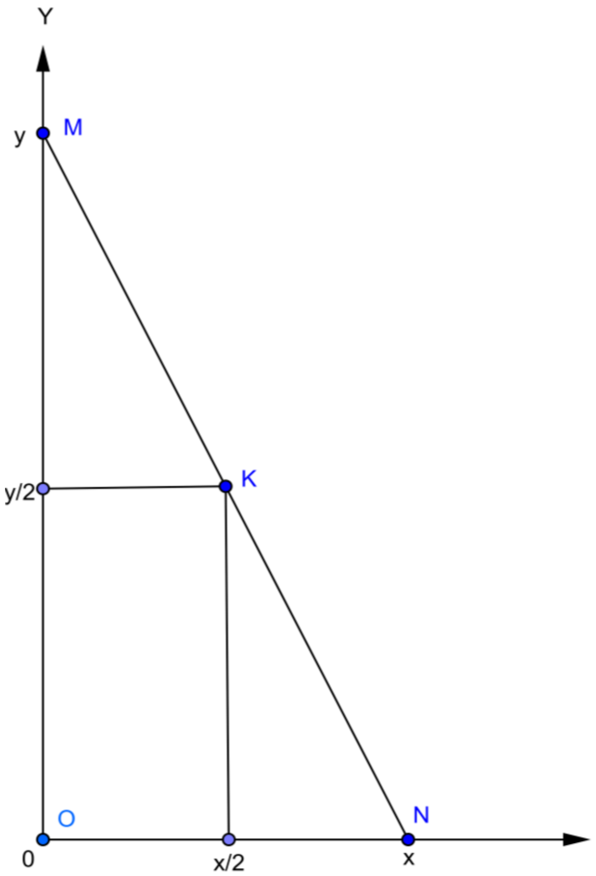
Докажем, что меньшим количеством ходов обойтись нельзя. Введем на доске "систему координат": левый нижний угол имеет координаты (1,1), а правый верхний – (n,n). При движении коня от первого из этих углов ко второму, он увеличивает сумму своих координат на $2n-2\geq 6m-4$. За один ход он может увеличить сумму координат максимум на 3, поэтому ходов потребуется не меньше, чем $2m-1$ $2m$ – 1. Но так как оба угла доски окрашены в один цвет, коню требуется четное число ходов, чтобы попасть из одного угла в другой. Поэтому их не меньше $2m$.

11.4. Пусть NS и EW – два перпендикулярных диаметра окружности Ω. Прямая l касается окружности Ω в точке S. Пусть A и B – точки на Ω, симметричные относительно диаметра EW. Обозначим через A' и B' точки пересечения l с прямыми NA и NB соответственно. Доказать, что $SA'\cdot SB'=SN^2$.



Решение. Углы $A'NS$ и $B'NS$ опираются на дуги, сумма которых равна 180°. Значит, сумма этих углов равна 90°. Поэтому прямоугольные треугольники NSA' и NSB' подобны и имеют пропорциональные стороны: $A'S:NS=NS:B'S$, откуда вытекает требуемое.

11.5. Лестница длиной l прислонена вертикально к стене. На середине лестницы сидит кошка. В момент времени $t_0 = 0$ нижний край лестницы начинает скользить по полу, удаляясь от стены со скоростью $v = 2t$, где t – момент времени (или промежуток времени, прошедший от момента t_0 – начала скольжения); верхний край лестницы соскальзывает по стене, а кошка сидит неподвижно относительно лестницы на ее середине. Останется ли кошка живой после приземления ее на пол?



Решение. Введем декартову систему координат с осью X по полу (перпендикулярно стене), осью Y по стене (перпендикулярно полу). Пусть N – нижний край лестницы, M – верхний край, K – ее середина: $N(x;0)$, $M(0,y)$, $K(x/2, y/2)$.

Производная координаты точки (как функции времени), движущейся прямолинейно, равна скорости точки.

Точка N прямолинейно движется по оси X, поэтому, из условия задачи, $x_t' = v = 2t$, следовательно $x = t^2$ (т.к. $x_0 = x(0) = 0$).

Точка M движется прямолинейно по оси Y; найдем закон ее движения из условия $x^2 + y^2 = l^2$, откуда

$$y = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{l^2 - t^4}, \qquad y_t' = \frac{-2t^3}{\sqrt{l^2 - t^4}}.$$

Момент приземления точки M найдем из условия $y = 0$:

$$\sqrt{l^2 - t^4} = 0 \Leftrightarrow t^4 = l^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{l}, \text{ тогда } y_t'(\sqrt{l}) = \frac{-2l\sqrt{l}}{\sqrt{l^2 - l^2}} = \infty.$$

Высота, на которой находится кошка, в любой момент времени в два раза меньше высоты точки M, и вертикальная составляющая скорости кошки в два раза меньше скорости точки M, но, все равно, бесконечно большая.

Ответ: теоретически – нет.)))